La méthode par substitution consiste à ramener une inconnue à son expression en fonction d'une autre inconnue, puis à substituer la chaîne numérique en question dans la deuxième équation.

Prenons le cas suivant afin de pouvoir expliquer par l'exemple (NB : on laisse ici les valeurs numériques en nombres afin d'aider le candidat mais ce ne sera pas toujours le cas) :

> Dans un marché, 2 kilos de pommes et une salade valent autant que 3 salades et un kilo de pomme. De plus 2 kilos de pommes valent 3 euros de plus qu'une seule salade. Combien vaut une salade ?

On va résumer les phrases par un système d'équations.

$$\begin{cases} 2P + S = 3S + P \\ 2P = 3 + S \end{cases}$$

La méthode par substitution va alors consister à ramener une variable (autrement dit, une inconnue) à sa plus simple expression, de cette manière :

$$\begin{cases} 2P - P = 3S - S \\ 2P = 3 + S \end{cases} \qquad \begin{cases} P = 2S \\ 2P = 3 + S \end{cases}$$

Ici le but était d'obtenir P = … Dès lors, il est facile de remplacer P par 2S dans l'autre équation.

$$\begin{cases} P = 2S \\ 2 * 2S = 3 + S \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = 2S \\ 4S - S = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} P = 2S \\ S = 1 \end{cases}$$

La salade vaut donc un euro et il est facile de conclure que le kilo de pomme vaudra alors deux euros. Prenons maintenant un autre exemple avec le cas des âges, comme évoqué précédemment. On donne l'énoncé suivant : « Jean a 2 ans de moins que Pierre. Robert a 2 fois l'âge de Jean. A eux trois ils ont 90 ans. Déterminer l'âge de chacun des trois amis ».

On peut poser le système d'équations suivant :

J = P – 2
R = 2 J
R + P + J = 90

On prend la ligne où le plus de variables (inconnues) apparaît, donc la troisième et on remplace par les éléments donnés dans les deux autres équations.

R + P + J = 90
devient
2J + J + 2 + J = 90
donc 4 J = 88 et J = 22

Si J = 22 alors R = 44 et P = 24

De très nombreux problèmes de ce type peuvent être trouvés dans les manuels de mathématiques de la classe de troisième. Les problèmes de tests utilisent souvent cette logique, mais pas seulement les problèmes : c'est pour cette raison que le chapitre est séparé de ceux-ci. Considérons donc un exemple avec non pas un énoncé classique mais des symboles.

Ɋ + Ƞ = ֎
Ԫ - Ƞ = ֎
Ɋ + Ɋ = Ԫ
Ƞ = 1

Déroutant au départ (surtout si on remplace les symboles par des dominos ayant des valeurs différentes de celle en fait exprimée), cet énoncé peut être facilement résolu par un système et notamment par une méthode par substitution. Voici comment.

Remplaçons tout d'abord chaque élément visuel par une lettre, tout simplement parce que depuis le collège, l'étudiant est habitué en cours de mathématiques à raisonner sur des lettres et non pas sur des symboles. Il convient donc de traiter un exercice avec des éléments qui lui sont familiers, afin de limiter les risques d'erreurs et d’accroître la rapidité de traitement de calcul. Pour faire ces remplacements, il ne faut pas utiliser un brouillon, mais se baser sur la feuille d'énoncé et écrire **directement** sur les symboles, à l'aide d'un feutre noir, pour là encore gagner du temps.

Un remplacement des symboles par des lettres donnerait alors, par exemple :

A + B = C
D - B = C
A + A = D
B = 1

L'exercice devient alors clairement apparenté à un système d'équations qu'on résoudra facilement :

A + B = D - B
2A = D
B = 1

A + 1 = D - 1
2A = D
B = 1

On sera attentif au « +1 » et au « -1 » de l'autre côté : la plupart du temps, l'élève serait tenté de les éliminer alors qu'en fait, en en changeant un de côté, il changera de signe et on devra alors procéder à une addition.

A + 2 = D
2A = D
B = 1

A + 2 = D
2A = A + 2 donc 2A – A = 2 et A = 2
B = 1

2 + 2 = D
A = 2
B = 1
A + B = C (on rappelle ici une donnée de l'énoncé)

A = 2
B = 1
C = 3
D = 4

Résoudre un système : méthode par addition

La substitution n'est pas la seule méthode pour résoudre un système. Si on souhaite faire une résolution mentale, on utilisera plutôt une méthode par addition. Celle-ci consiste à ajuster les deux équations entre elles de manière à faire correspondre les coefficients des inconnues, puis à la ajouter pour se retrouver au final avec une seule inconnue.

Encore une fois, un bon exemple vaut mieux qu'un long discours. Prenons le cas d'un système de deux équations à deux inconnues ordonné (c'est-à-dire dont on a classé les inconnues) qu'on aurait à résoudre :

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 3x - y = 13 \end{cases}$$

La première étape de cette méthode consiste à ajuster les coefficients entre eux. Ici l'expérience guide à ajuster la deuxième équation par rapport à la première. Pour cela, il convient donc de multiplier **l'ensemble** de la deuxième équation par 3, de manière à ce que le coefficient associé au *y* devienne identique au coefficient du *y* de la première équation. On obtient ainsi le nouveau système suivant :

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 9x - 3y = 39 \end{cases}$$

On s'aperçoit alors que dans ce cas, on dispose d'un « +3y » et d'un « -3y ». On peut alors naturellement les éliminer en procédant à l'addition des égalités, de la manière suivante :

$$\begin{cases} x + 3y + 9x - 3y = 1 + 39 \\ 9x - 3y = 39 \end{cases}$$

De manière assez naturelle, la première ligne est rapidement simplifiée.

$$\begin{cases} x \cancel{+ 3y} + 9x \cancel{- 3y} = 1 + 39 \\ 9x - 3y = 39 \end{cases}$$

devient

$$\begin{cases} 10x = 40 \\ 9x - 3y = 39 \end{cases}$$

On déduit facilement que la valeur de x est 4, la résolution du système par une méthode de substitution prendra alors le relais en remplaçant x par 4 dans la deuxième équation.

$$\begin{cases} x = 4 \\ \end{cases}$$

$$36 - 3y = 39$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ -3y = 39 - 36 \end{cases}$$

Si -3y vaut 3, c'est que la valeur de y est -1. Le système est donc résolu.

L'avantage de la méthode par addition est sa rapidité de traitement et surtout le fait de ne pas avoir à jongler avec les inconnues pour trouver la valeur d'au moins une d'entre elles. Par conséquent, il est idéal de pouvoir utiliser une méthode par addition afin de pouvoir résoudre des systèmes simples (n'utilisant ni virgules ni fractions, sauf pour un candidat qui serait bien entraîné). C'est le but vers lequel tout étudiant préparant sérieusement un concours devrait tendre.

Passons maintenant à un deuxième exemple un peu plus complexe et dans lequel les équations ne seront pas ordonnés. Considérons donc le système suivant :

$$\begin{cases} 2a - 2t = 45 \\ a - t = 38 + t - 2 \\ c = 3t \end{cases}$$

La simple considération de ce système renseigne immédiatement sur la procédure de résolution : bien qu'il y ait trois inconnues, c'est en travaillant sur les deux premières équations qu'on débloquera des solutions. Nous allons donc inverser le sens de la première équation afin d'obtenir un signe négatif devant le « 2a » et dans le même temps, nous allons multiplier par 2 la deuxième ligne. Ainsi nous obtiendrons des coefficients égaux pour l'inconnue dénommée « a ».

$$\begin{cases} 2t - 2a = -45 \\ 2a - 2t = 76 + 2t - 4 \\ c = 3t \end{cases}$$

Par suite, on pourra directement supprimer l'inconnue « a » et additionner ce qui reste de chaque côté des égalités. Mais si on procède à cela, on s'aperçoit alors que, du moins sur le côté gauche, l'inconnue « t » disparaîtra également. Ce n'est pas un problème, il suffira alors d'écrire 0 de ce côté de l'égalité. On obtiendra alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} 0 = -45 + 76 + 2t - 4 \\ c = 3t \end{cases}$$

Cela permet, après calcul de la partie droite de la première équation, de déterminer que t vaut - 13,5.

0 = 2t + 27
donc 2t = - 27 et t = - 13,5

A partir de là, il est facile de déduire la valeur de l'inconnue « c » et de poser les calculs qui permettront de trouver « a ».

$$\begin{cases} 2a - 2 \times (-13{,}5) = 45 \\ t = -13{,}5 \\ c = -40{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + 27 = 45 \\ t = -13{,}5 \\ c = -40{,}5 \end{cases}$$

2a vaudra alors 45 – 27, c'est-à-dire 18 ; on voit alors que « a » est crédité d'une valeur de 9. Ces deux exemples sont à savoir résoudre parfaitement avant de passer à la suite ou aux exercices qui sont proposées plus loin dans ce chapitre : ils résument en effet à eux deux l'essence même du calcul par addition.

Voyons maintenant un dernier exemple, cette fois-ci non pas avec des lettres mais avec des symboles quelconques. On considère donc l'exercice suivant à résoudre :

Ø + Ʊ = Ʒ
Ʒ + Ʊ = Ш
Ø + Ʊ + Ʊ = 1
Trouver la valeur de « Ш »

Pour la plupart des étudiants, on pourra remplacer les symboles par des lettres. Cependant en observant attentivement le problème, on remarque qu'on peut simplifier légèrement les « équations » qui le composent et cela même sans avoir recours à des transformations de symboles. En effet, si on soustrait de la troisième ligne la première, on obtiendra une égalité fort utile.

Ø + Ʊ = Ʒ
Ʒ + Ʊ = Ш
~~Ø + Ʊ~~ + Ʊ ~~- Ø - Ʊ~~ = 1 - Ʒ

D'où l'on déduit que :

Ø + Ʊ = Ʒ
Ʒ + Ʊ = Ш
Ʒ + Ʊ = 1 donc Ш = 1

C'est une simple soustraction, cette fois-ci, qui a permis de retrouver la valeur recherchée. Il est à noter que parfois les exercices ne demandent en effet que de retrouver une seule valeur et non pas l'ensemble : c'est une information à garder à l'esprit lors de la résolution, toujours dans un souci de gain de temps lors de l'épreuve. Avec les informations qui sont données ici, il n'aurait pas été possible de retrouver les autres valeurs : pour trouver quatre valeurs associées à quatre symboles, il faut en général pouvoir compter sur quatre équations.

L'application de cette méthode, si on se confine à deux inconnues, débouche naturellement sur la génération d'une formule à appliquer pour résoudre au moins une partie du système : on ne livre ici qu'une seule de ces formules de manière à ne pas surcharger la mémoire du candidat, mais aussi car une fois qu'une inconnue a été trouvée, il est généralement facile de retrouver la valeur de l'autre.

On peut donc en déduire le « théorème » suivant, qui pourra aider certains candidats lors de ce genre de problèmes.

Si un système est ordonné de telle sorte que :

$$\begin{cases} ax+by = c \\ a'x+b'y = c' \end{cases}$$

alors la solution de l'inconnue y est donnée par :

$$y=\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}$$

On peut s'aider visuellement du parcours effectué par les yeux pour mémoriser le procédé plutôt que la formule. A titre d'exemple, résolvons un système simple :

$$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 2x - 5y = 8 \end{cases}$$

En posant la formule, on obtiendra le calcul suivant pour y :

$$y=\frac{2\times7-1\times8}{2\times5-1\times(-5)}=\frac{14-8}{10+5}=\frac{6}{15}=\frac{3\times2}{3\times5}=0{,}4$$

Il sera dès lors facile de retrouver la valeur de x. Passons maintenant aux exercices (quelques uns proposent un corrigé détaillé).

Exercices

Exercice 1

Antoine et Georges se répartissent la somme de 124 euros. Ils conviennent entre eux que Georges aura 12 euros de plus. Combien possédera Antoine dans ce cas ?

Exercice 2

Un homme se rend dans un magasin et constate que :

- s'il achète 3 salades, 2 tee-shirt et 4 conserves, il devra payer 21 euros
- s'il achète 1 salades, 2 tee-shirt et 3 conserves, il devra payer 16 euros
- s'il achète 3 salades, 2 tee-shirt et 3 conserves, il devra payer 20 euros

Il est possible en trois opérations mentales de retrouver les prix de chaque produit. Quels sont ces prix ?

Exercice 3

Dans trois ans, Albert aura deux fois l'âge de Georges. Cependant Georges aura alors quatre ans de moins que Benjamin. On sait qu'à l'heure actuelle, Albert a sept ans de plus que Benjamin. A partir de ces informations, déterminer l'âge de chacun des protagonistes.

Exercice 4

Déterminer les valeurs de ►, ◄ et ▼ tels que :

▼ + ► = ◄ - 1
◄ = 2▼ + 5
2► - ▼ = ◄

Exercice 5

♣	=	♠	+	1	
♥	=	2	+	♣	♥ ?
5	=	♣	+	3	

Exercice 6

■	■	■	■	5
╣	╠	■	╣	12
╠	╣	■	╣	12
╠	■	╣	╠	12

12 11 9 11

▀ = ?

A/ 1 B/ 2 C/ 3 D/ 4

▄ = ?

A/ 1 B/ 2 C/ 3 D/ 4

╠ = ?

A/ 1 B/ 2 C/ 3 D/ 4

╣ = ?

A/ 1 B/ 2 C/ 3 D/ 4